# Risoluzione Problemi Campionato Tappa di Giugno

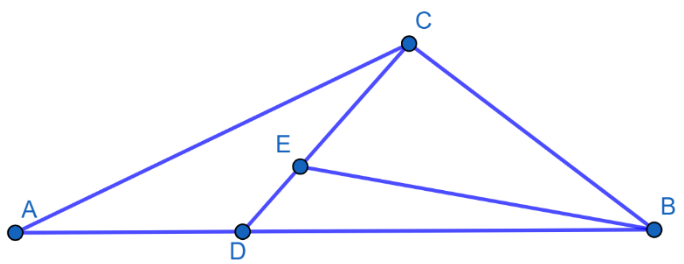
## Problema Giugno (cat. 1-2 Media)

**Testo:**
Per festeggiare la fine della scuola, i ragazzi del Team si sfidano a quesiti matematici, e ad un certo punto Simo ne pone uno a Dani. “Il quadrato del reciproco di un numero è uguale al reciproco di quel numero meno il quadrato del reciproco, quanto vale quel numero?”. Cosa deve rispondere Dani per vincere la sfida?

**Svolgimento:**
Consideriamo che quel numero sia *a*, il quesito diventa così: $\left(\frac{1}{a}\right)^2 = \frac{1}{a} - \left(\frac{1}{a}\right)^2$. Ovvero, $\frac{2}{a^2} = \frac{1}{a}$. Riflettendoci diventa chiaro che a non può essere dispari, perché in tal caso non si semplificherebbe il 2 al numeratore. Per motivi simili, *a* non può essere un numero maggiore di 4, poiché se così fosse le frazioni non sarebbero equivalenti. Quindi, le possibilità sono o 2 o 4. Verificando i 2 valori, si riscontra subito che *a*=2.

## Problema Giugno (cat. 3 media-1 Superiore)

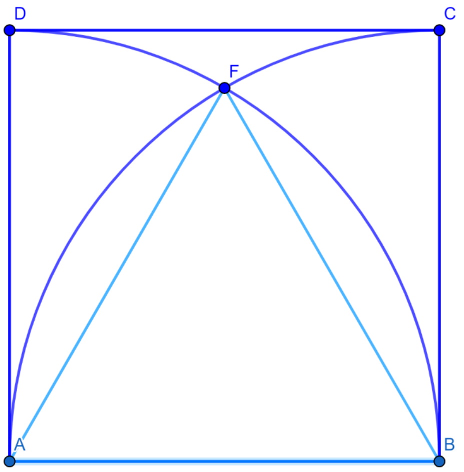
**Testo:**




Il Team di ricercatori del DiarikLab è giunto da poco nella foresta pluviale di MathRain, e deve suddividere la zona da studiare in settori. Perciò i vari scienziati cominciano a proporre delle possibilità per iniziare con un piccolo settore, e anche il tirocinante dice la sua. Per lui, sarebbe una buona idea partire dal loro campo base (punto E) e costruire intorno a esso una divisione come in figura, con ECB retto e CBE=30’ . Secondo i suoi calcoli, il limite AC dovrebbe essere il doppio di AD, CB misura AD$\sqrt{3}$, e  AD+EC=93 hm. Questa proposta affascina il Master a capo del gruppo, ma ritiene sia utile, per coprire più spazio, aggiungere un’altra zona. A questo proposito, indica ai suoi sottoposti di costruire sulla cartina un quadrato sul tratto EC, nel semipiano opposto a B, e di tracciarvi all'interno gli archi di semicirconferenza con centro prima in E poi in C e raggio EC. Chiamato F il punto di incontro di questi quarti di circonferenza, la superficie ECF è quella che interessa al professore, e la concede allo studio del tirocinante come incoraggiamento. Quanti ettometri quadrati di foresta dovrà esaminare lo studente? (si approssimi la risposta all'intero più vicino)

**Svolgimento:**

Prima di tutto, è utile fare una costruzione accessoria, ovvero prolungare CB dalla parte di C e tracciare la perpendicolare su questo segmento dal punto A, individuando G. Il triangolo ACG è un triangolo rettangolo, con angoli ACB=60' e GAC=30', è perciò metà di un triangolo equilatero. Da quanto scoperto si possono calcolare gli altri lati in relazione a AC, e quindi a AD: AG=AD$\sqrt{3}$, GC=AD. Si nota subito qualcosa di importante, ovvero che i triangoli EBC e ACG sono congruenti, perciò anche EC misura quanto AD; da AD+EC= 93 deriva che EC=46,5. Ora possiamo procedere con la figura ECF, rappresentata qui in figura.

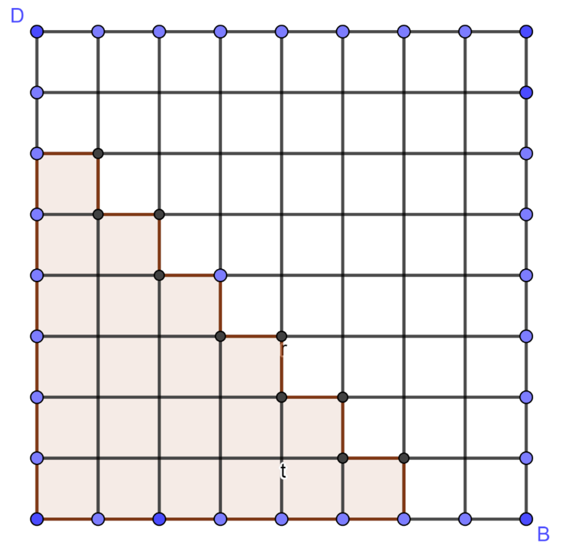



Per calcolare l'area della figura mistilinea ABF è utile costruire il triangolo equilatero ABF. Partiamo calcolando l'area di uno dei due settori circolari, usando la formula $\pi r^2(\frac{\measuredangle}{360'})$, poiché è equilatero $\measuredangle$=60', e l'area misura $\frac{\pi r^2}{6}$, l'area del triangolo equilatero risulta essere $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$, e per differenza tra le due si ottiene l'area del segmento circolare rimanente. Infine, sommando l'area del settore circolare ricavata prima, e quella del segmento circolare ottenuta ora ricaviamo che l'area della figura mistilinea misura $\frac{\pi r^2}{3}$ - $\frac{r^2\sqrt{3}}{4}$= $\frac{r^2(4\pi-3\sqrt{3})}{12}$. Precedentemente abbiamo calcolato r=CE=46,5 hm. Inserendo questa informazione nella formula ricaviamo che l'area approssimata della figura vale 1328 hm².

## Problema Giugno (cat. 2-3 Superiore)

### Testo:

La Prof.ssa Claudia ha organizzato un campo estivo di matematica, e mentre i bambini giocano nell'enorme scacchiera 8x8, chiede a Big Simo: “Quanti sono i percorsi di lunghezza minima totali, senza mai muoversi in diagonale, ma solo in verticale e orizzontale dalla casella di vertice B a quella di vertice D, escludendo tutti quelli che passano sulle caselle colorate di arancione?
Che risposta dovrebbe dare Simo per assicurarsi il 9 in pagella?




### Svolgimento:

Le soluzioni che proponiamo per questo problema finale sono 2.
La prima è una soluzione che implica il conteggio di tutti i possibili percorsi, partendo dalla casella B e sommando i possibili modi di passare da una casella all'altra fino arrivare a D. Un metodo un po' lungo, ma efficace, che porta alla soluzione di 1430 modi totali.
Il secondo metodo consisteva nel riconoscere che i possibili percorsi che stanno sulla diagonale equivalgono ai numeri di Catalan. Per questo avendo 8 caselle avremmo ottenuto 1430 percorsi.

## Problema Giugno (cat. 4-5 Superiore)

**Testo:**
Come gita post maturità i ragazzi di Diariko decidono di andare al lago di Garda. Simo non ha controllato quanta strada devono fare a piedi per i loro piani, quindi decide di chiederlo ad una intelligenza artificiale un po' particolare. Questa AI non fornisce mai un risultato preciso, ma fornisce un problema di matematica che ha un ugual risultato a quello richiesto. Al quesito di Simo l'AI risponde in questo modo: "Dato il triangolo ABC con AB= 5km e AC= 3km e l'angolo compreso BAC di 120°, la cui bisettrice interseca BC in D, voi dovrete fare tanti metri quanti sono quelli della differenza tra BC e BD." Quanti metri dovranno fare i ragazzi in questa gita?

**Svolgimento:**
Nella situazione descritta possiamo applicare il teorema della bisettrice:
AB : AC = BD : DC. Ricordando le proprietà delle proporzioni, utilizziamo la regola dell'addizione: (AB + AC) : AB = (BD + DC) : BD. Osserviamo che BD + DC = BC. Possiamo ricavare la lunghezza di questo lato con il teorema del coseno:

BC = $\sqrt{AB^2 + AC^2 - 2 \cdot AB \cdot AC \cdot cos(120)}$ = 7 km.

Ritornando alla proporzione di prima risulta: (AB + AC) : AB = (BC) : BD. Da questa risulta che BD = $\frac{AB \cdot BC}{AB+AC} = \frac{5 \cdot 7}{8}$ = 4, 375.

A questo punto ricaviamo la differenza BC-BD richiesta dal problema, e ci risulta 2,625 km, che in metri vale: 2625.